https://doi.org/10.69639/arandu.v13i3.2636

Posibilidades didácticas de Graspable Math en la resolución de ecuaciones lineales en noveno año de Educación General Básica

Instructional possibilities of Graspable Math for solving linear equations among ninth-grade students in General Basic Education

Andrés Darío Guallichico Tipán
adguallichico@utpl.edu.ec
https://orcid.org/0009-0004-4606-957X
Universidad Técnica Particular de Loja
Quito – Ecuador

Ricardo Patricio Blacio Maldonado
rpblacio@utpl.edu.ec
https://orcid.org/0009-0006-7947-5894
Universidad Técnica Particular de Loja
Loja – Ecuador

Artículo recibido: 10 agosto 2026- Aceptado para publicación:16 septiembre 2026
Conflictos de intereses: Ninguno que declarar.

RESUMEN

La enseñanza de las ecuaciones lineales suele centrarse en reglas operativas que pueden limitar la comprensión de la igualdad como relación de equivalencia. Este estudio tuvo como objetivo analizar el desempeño de estudiantes de noveno año de Educación General Básica tras una intervención didáctica mediada por Graspable Math, así como examinar las posibilidades que ofrece la herramienta para manipular, visualizar y revisar expresiones algebraicas. Para ello, se realizó un estudio cuantitativo cuasiexperimental con 56 estudiantes de entre 12 y 14 años, distribuidos en un grupo control y uno experimental. Ambos grupos respondieron pruebas pedagógicas antes y después de la intervención, y el grupo experimental completó, además, una encuesta de satisfacción. En el postest, el grupo experimental obtuvo una media de 7.86 puntos, frente a 6.07 del grupo control, diferencia que resultó estadísticamente significativa ($U = 88.00$; $p < .001$). Los estudiantes valoraron positivamente la visualización de los procedimientos, la manipulación de términos y la identificación de errores. En conjunto, los resultados sugieren que Graspable Math puede favorecer la comprensión de las transformaciones algebraicas y la conservación de la igualdad, siempre que su uso se integre en una secuencia didáctica planificada y con mediación docente. Se recomienda profundizar en el análisis de las acciones de los estudiantes para comprender mejor cómo construyen significados algebraicos en el entorno digital.

Palabras clave: Graspable Math, ecuaciones lineales, álgebra dinámica, equivalencia algebraica, educación matemática

ABSTRACT

The teaching of linear equations often focuses on operational rules that may limit students' understanding of equality as an equivalence relation. The objective of this study was to analyze the performance of ninth-grade students in General Basic Education following a teaching intervention mediated by Graspable Math, as well as to examine the possibilities offered by the tool for manipulating, visualizing, and reviewing algebraic expressions. To this end, a quantitative quasi-experimental study was conducted with 56 students aged 12 to 14, divided into a control group and an experimental group. Both groups took educational tests before and after the intervention, and the experimental group also completed a satisfaction survey. On the posttest, the experimental group scored an average of 7.86 points, compared to 6.07 for the control group—a difference that was statistically significant ($U = 88.00$; $p < .001$). The students rated the visualization of procedures, the manipulation of terms, and the identification of errors positively. Overall, the results suggest that Graspable Math can promote understanding of algebraic transformations and the preservation of equality, provided its use is integrated into a planned instructional sequence with teacher mediation. Further analysis of student actions is recommended to better understand how they construct algebraic meaning in the digital environment.

Keywords: Graspable Math, linear equations, dynamic algebra, algebraic equivalence, mathematics education

Todo el contenido de la Revista Científica Internacional Arandu UTIC publicado en este sitio está disponible bajo licencia Creative Commons Atribution 4.0 International.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra escolar constituye uno de los desafíos persistentes de la Educación General Básica, particularmente cuando los estudiantes transitan desde procedimientos aritméticos hacia formas de razonamiento que involucran símbolos, incógnitas, equivalencias y transformaciones. En este proceso, las ecuaciones lineales con una incógnita resultan fundamentales, porque articulan nociones como igualdad, operaciones inversas, conservación de la equivalencia y validación de soluciones. Sin embargo, en la práctica escolar su enseñanza suele quedar reducida a la aplicación de reglas procedimentales, lo que puede limitar la comprensión del sentido matemático detrás de las transformaciones realizadas.

Resolver una ecuación lineal no se trata simplemente de aislar una incógnita: desde una perspectiva didáctica, implica reconocer que la ecuación expresa una relación de equivalencia entre dos miembros, y que cada transformación aplicada debe preservar dicha relación. Cuando esta comprensión no llega a consolidarse, los estudiantes tienden a operar a partir de reglas memorizadas —como "pasar al otro lado" o "cambiar de signo"— sin identificar realmente la propiedad matemática que justifica esa acción de equilibrio. Esto da lugar a errores frecuentes en la transposición de términos, en el manejo de signos, en la aplicación de operaciones inversas y en la interpretación de la incógnita como número desconocido.

Las dificultades vinculadas a las ecuaciones lineales han sido ampliamente documentadas en la investigación en Educación Matemática. Socas (1997) sostiene que los errores en matemática no deberían interpretarse únicamente como fallas de cálculo, sino más bien como manifestaciones de las dificultades y obstáculos que surgen durante la construcción de significados sobre las abstracciones. En esa misma línea, Filloy y Rojano (1989) señalan que el tránsito de la aritmética al álgebra representa una ruptura didáctica importante, ya que el estudiante debe aprender a operar con lo desconocido y no limitarse a efectuar operaciones sobre cantidades ya conocidas. Este tránsito exige reorganizar el modo en que se interpretan los símbolos, la igualdad y las transformaciones.

En estudios más recientes, Pérez et al. (2019) identifican que los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita responden a causas diversas, entre ellas el uso inadecuado de reglas procedimentales, la comprensión parcial de la igualdad y las dificultades para coordinar operaciones equivalentes. Por su parte, Acaro-Lapo et al. (2024) destacan que la enseñanza de ecuaciones lineales continúa siendo un reto en la educación básica, especialmente cuando la resolución se limita a procedimientos algorítmicos sin suficiente apoyo conceptual. Estos aportes muestran que el aprendizaje algebraico requiere experiencias didácticas que permitan relacionar procedimientos simbólicos con significados matemáticos.

El problema didáctico no se limita, por tanto, a que los estudiantes obtengan respuestas incorrectas. También se relaciona con la posibilidad de resolver una ecuación aplicando reglas

memorizadas, sin llegar a reconocer las propiedades matemáticas que justifican cada transformación. Desde esta perspectiva, el análisis de una herramienta digital no debería centrarse únicamente en si mejora o no las calificaciones, sino también en examinar qué oportunidades ofrece para representar la igualdad, actuar sobre las expresiones, revisar los procedimientos y explicar las transformaciones que se van realizando.

En consecuencia, enseñar ecuaciones lineales exige superar la idea de que aprender álgebra se reduce a dominar una serie de pasos formales. Si bien los procedimientos son necesarios, estos cobran sentido cuando el estudiante comprende por qué una transformación es válida y qué relación se conserva dentro de la ecuación. Desde esta mirada, el aprendizaje del despeje de incógnitas debe estar vinculado con la noción de equilibrio, con la identificación de operaciones inversas y con la posibilidad de justificar cada paso que se realiza. Esta comprensión cobra especial relevancia en los primeros años de la escolaridad secundaria, ya que las ecuaciones lineales constituyen la base para contenidos algebraicos posteriores, como las funciones, los sistemas de ecuaciones y la interpretación de fórmulas.

Asimismo, al abordar didácticamente las ecuaciones lineales hay que tener en cuenta que los estudiantes no siempre interpretan el lenguaje simbólico de manera inmediata. Una misma expresión algebraica puede leerse como una indicación operativa, como una relación entre cantidades o como una estructura susceptible de ser transformada. Por eso, la mediación docente debe generar situaciones en las que el estudiante explique sus procedimientos, compare distintas formas de resolución y reconozca que dos expresiones pueden ser equivalentes aun cuando presenten formas simbólicas diferentes. En este sentido, los recursos digitales interactivos pueden ofrecer un apoyo relevante, siempre que su incorporación esté acompañada de preguntas, orientaciones y tareas que favorezcan la reflexión matemática.

En este escenario, las tecnologías digitales interactivas abren posibilidades interesantes para la enseñanza del álgebra, siempre que se integren con una intencionalidad pedagógica clara. Su valor no está solo en hacer la clase más atractiva, sino en ofrecer nuevas formas de representación, manipulación y retroalimentación capaces de favorecer la comprensión de objetos matemáticos abstractos. Cabero-Almenara et al. (2020) señalan que los recursos digitales pueden contribuir al desarrollo de competencias docentes y transformar las prácticas de enseñanza cuando se emplean con criterios pedagógicos. Asimismo, Vargas-Murillo (2020) afirma que la tecnología digital puede contribuir a dinamizar el proceso de enseñanza-aprendizaje si se articula con estrategias educativas pertinentes.

Graspable Math es una herramienta digital interactiva que permite manipular expresiones algebraicas mediante acciones como arrastrar, reorganizar, combinar y transformar términos. A diferencia de los recursos que solo entregan resultados, esta herramienta permite visualizar el proceso de transformación de una ecuación, lo que abre posibilidades didácticas para trabajar la conservación de la igualdad, el despeje de incógnitas y la verificación de soluciones. Así, el

estudiante no solo resuelve una ecuación, sino que interactúa con su estructura, observando y manipulando cada paso con la consigna de modificar la expresión inicial manteniendo la relación de igualdad (Graspable Math, s. f.; Ottmar et al., 2015).

Los sistemas de notación algebraica dinámica han mostrado efectos positivos en la comprensión de la equivalencia matemática, al permitir que los estudiantes transformen expresiones y observen la conservación de relaciones algebraicas durante el proceso de resolución (Chan et al., 2022). Asimismo, Sapallanay Gómez et al. (2023) reportaron que el uso de Graspable Math favorece el aprendizaje de ecuaciones de primer grado, al permitir la manipulación interactiva de expresiones algebraicas y la visualización de los procedimientos de resolución.

Aunque estos estudios muestran resultados favorables, es necesario diferenciar entre el desempeño alcanzado después de utilizar una herramienta digital y los procesos matemáticos que se desarrollan durante su utilización. Comparar calificaciones permite identificar diferencias de rendimiento, pero no basta por sí solo para explicar cómo interpretan los estudiantes la igualdad, qué acciones realizan sobre las expresiones, cómo identifican sus errores o de qué manera justifican las transformaciones algebraicas. Este estudio parte precisamente de esa distinción para interpretar los resultados cuantitativos a la luz de las posibilidades de representación, manipulación y retroalimentación que ofrece Graspable Math.

El uso de Graspable Math puede resultar especialmente pertinente en la enseñanza de ecuaciones lineales, ya que permite convertir procedimientos abstractos en acciones visibles. Al manipular términos y observar transformaciones equivalentes, los estudiantes logran relacionar el procedimiento algebraico con la noción de equilibrio entre ambos miembros de la ecuación. De este modo, la herramienta funciona como un puente entre la representación simbólica y la comprensión conceptual del procedimiento.

En el contexto ecuatoriano, fortalecer el aprendizaje de las ecuaciones lineales en la Educación General Básica resulta relevante no solo para el área de Matemática, sino también para el desarrollo posterior de competencias científicas. El dominio del despeje de incógnitas, la interpretación de fórmulas y el razonamiento proporcional son habilidades necesarias para asignaturas como Física y Química. Los informes nacionales sobre desempeño estudiantil han evidenciado dificultades en el área matemática, lo cual refuerza la necesidad de implementar propuestas didácticas orientadas a promover comprensión, razonamiento y un uso significativo del lenguaje algebraico (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2023; Ministerio de Educación, Deporte y Cultura, 2025).

Con base en estas consideraciones, el objetivo del estudio fue analizar el desempeño alcanzado por estudiantes de noveno año de Educación General Básica después de participar en una intervención didáctica mediada por Graspable Math y examinar las posibilidades didácticas de la herramienta para visualizar, manipular y revisar las transformaciones realizadas durante la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.

El estudio se orientó mediante las siguientes preguntas: ¿Qué diferencias se observan entre el desempeño del grupo control y del grupo experimental después de las intervenciones didácticas? ¿Cómo valoran los estudiantes del grupo experimental las posibilidades de manipulación, visualización y retroalimentación ofrecidas por Graspable Math? ¿Qué implicaciones didácticas pueden plantearse, a partir de estos resultados, para la enseñanza de la igualdad y de las transformaciones equivalentes?

Ecuaciones lineales, igualdad y álgebra dinámica

En el aprendizaje de las ciencias exactas, las ecuaciones lineales con una incógnita constituyen un contenido fundamental en la organización del conocimiento algebraico escolar, ya que proporcionan el lenguaje necesario para modelar, analizar y comprender fenómenos de la realidad. Desde el punto de vista matemático, una ecuación lineal con una incógnita puede expresarse, tras simplificar, como $ax + b = c$. Su solución es el valor de la incógnita que satisface esa igualdad. Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, aprenderla exige comprender que la igualdad no es una simple señal de resultado, sino una relación de equivalencia que debe mantenerse a lo largo de todo el proceso de resolución.

Esta distinción resulta relevante porque muchos estudiantes llegan al álgebra con una interpretación operacional del signo igual. En la aritmética escolar, este signo suele aparecer al final de una operación y se asocia directamente con la respuesta obtenida. En una ecuación, en cambio, relaciona dos expresiones que pueden transformarse siempre que se conserve la equivalencia entre ellas. Ahí surge la dificultad: cuando el estudiante aplica procedimientos de forma mecánica, sin comprender que sumar o restar la misma cantidad en ambos miembros —o multiplicarlos o dividirlos por un mismo número distinto de cero— permite obtener ecuaciones equivalentes, es decir, con el mismo conjunto de soluciones.

El paso de la aritmética al álgebra implica, en realidad, una reorganización del pensamiento matemático. Filloy y Rojano (1989) señalan que resolver ecuaciones requiere operar con lo desconocido, algo que no se reduce simplemente a invertir operaciones aritméticas ya conocidas. En esta misma línea, Kieran (2004) sostiene que el pensamiento algebraico involucra formas de razonamiento que permiten trabajar con relaciones, estructuras y expresiones generalizadas. Por eso, enseñar ecuaciones lineales significa acompañar al estudiante en la construcción de significados sobre la incógnita, la igualdad y la transformación equivalente.

La investigación sobre errores algebraicos ha mostrado, además, que las dificultades no se limitan al cálculo. También se manifiestan en la interpretación de la incógnita, la lectura de expresiones simbólicas, el reconocimiento de términos semejantes, el manejo de signos y la comprensión de operaciones inversas. Pérez et al. (2019) identifican que los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita responden a causas diversas, entre ellas el uso inadecuado de reglas procedimentales y una comprensión solo parcial de las transformaciones algebraicas. En consecuencia, las propuestas didácticas para enseñar ecuaciones lineales deberían

ofrecer oportunidades reales para que los estudiantes exploren las expresiones, comparen procedimientos y justifiquen sus transformaciones.

Esta necesidad coincide con lo planteado por Bush y Karp (2013), quienes, en su revisión, identifican en estudiantes de grados medios diversas concepciones erróneas asociadas con contenidos algebraicos fundamentales, entre ellos las expresiones, las ecuaciones y las funciones. Estos autores destacan la importancia de priorizar la comprensión conceptual para lograr una transición más sólida hacia el razonamiento algebraico.

Desde una perspectiva semiótica, aprender matemática requiere coordinar distintos registros de representación y transformar expresiones sin que estas pierdan su significado. Duval (2017) plantea que el pensamiento matemático se apoya en transformaciones entre representaciones semióticas, de modo que comprender una ecuación no depende únicamente de reconocer símbolos, sino de operar con ellos de manera significativa. Esta idea cobra especial relevancia en el álgebra escolar, donde el estudiante debe interpretar, transformar y validar expresiones simbólicas.

La coordinación entre representación, acción y significado es, de hecho, un aspecto central en el aprendizaje de las ecuaciones. En el trabajo habitual con lápiz y papel, muchos procedimientos terminan reducidos a una secuencia escrita que no siempre permite visualizar la relación entre una transformación y la conservación de la igualdad. Por ejemplo, cuando un estudiante dice que un término "pasa al otro lado", puede llegar a una respuesta correcta sin entender que esa acción representa, en realidad, la aplicación de una operación inversa en ambos miembros de la ecuación. Este modo de proceder puede consolidar reglas aparentemente eficaces, pero conceptualmente frágiles, sobre todo cuando el estudiante se enfrenta a ecuaciones con signos negativos, paréntesis o términos semejantes en ambos lados de la igualdad.

Los entornos de álgebra dinámica ofrecen la posibilidad de hacer visibles algunas de estas relaciones. Al permitir que el estudiante actúe sobre los símbolos y observe las consecuencias de sus acciones, estos recursos pueden favorecer una comprensión más relacional del procedimiento algebraico. La expresión deja de ser solamente un objeto escrito y se convierte en un objeto manipulable, sobre el cual se pueden ensayar transformaciones, verificar equivalencias y analizar errores. Esta característica es pertinente para la enseñanza de ecuaciones lineales, porque permite vincular el procedimiento de despeje con la estructura de la igualdad y no únicamente con una regla verbal aprendida de memoria.

No obstante, el valor didáctico de una herramienta digital no depende únicamente de sus características técnicas. Su aporte se produce cuando el docente diseña tareas que orientan la exploración y promueven la explicación matemática. En el caso de Graspable Math, la manipulación de expresiones algebraicas puede convertirse en una oportunidad para discutir por qué una transformación es válida, qué propiedades de la igualdad se están utilizando y de qué manera se verifica una solución. Por tanto, la herramienta debe entenderse como un medio para

ampliar la actividad matemática del aula, no como un sustituto de la intervención pedagógica del profesor.

En este marco, los entornos digitales de álgebra dinámica pueden contribuir a la construcción de significados. A diferencia de la notación estática del cuaderno o de la pizarra, estos entornos permiten que las expresiones sean manipuladas y transformadas en tiempo real. Esta posibilidad modifica la relación del estudiante con el objeto matemático, pues la ecuación deja de ser una cadena fija de símbolos y se convierte en una estructura sobre la cual se puede actuar, observar y reflexionar.

En esta línea, Chan et al. (2023) destacan que Graspable Math permite analizar patrones de comprensión algebraica a partir de las acciones que realizan los estudiantes en el entorno digital, lo que amplía su valor como recurso didáctico y como herramienta de investigación en Matemática Educativa.

Graspable Math se caracteriza precisamente por permitir este tipo de interacción. La herramienta ofrece un espacio donde los términos pueden moverse, reagruparse y transformarse, manteniendo siempre visible la representación del proceso. Esta característica resulta valiosa para enseñar ecuaciones lineales porque permite representar de forma dinámica las propiedades de la igualdad. Cuando el estudiante realiza una transformación válida, ve el cambio reflejado en la expresión; cuando la acción no corresponde a una regla matemática aceptable, la herramienta le ofrece señales que lo orientan a revisar su procedimiento.

Desde una perspectiva didáctica, esta retroalimentación inmediata puede favorecer la autorregulación del aprendizaje. El estudiante no espera únicamente la corrección final del docente, sino que puede revisar su procedimiento durante la resolución. De este modo, el error adquiere un papel formativo, pues se convierte en una oportunidad para analizar la acción realizada y reajustar la estrategia. No obstante, esta posibilidad requiere la mediación docente para construir el andamiaje necesario que favorezca un aprendizaje significativo. La herramienta por sí sola no garantiza la comprensión; es necesario que el profesor oriente la interpretación de las acciones, promueva explicaciones y relacione cada transformación con las propiedades algebraicas que la justifican.

Así, Graspable Math puede entenderse como un recurso didáctico que favorece la coordinación entre representación simbólica, acción manipulativa y justificación matemática. Su uso en el aula permite desplazar la enseñanza de ecuaciones lineales desde la simple aplicación de reglas hacia una actividad en la que el estudiante explora la estructura de la igualdad, reconoce transformaciones equivalentes y verifica soluciones.

A partir de los antecedentes revisados, las posibilidades didácticas de Graspable Math pueden organizarse en tres dimensiones. La primera corresponde a la representación, es decir, la posibilidad de visualizar la ecuación, sus términos y los cambios que se producen durante la resolución. La segunda corresponde a la manipulación, relacionada con las acciones de mover,

reagrupar, combinar o transformar expresiones conservando la equivalencia. La tercera corresponde a la reflexión sobre el procedimiento, vinculada con la identificación de errores, la revisión de los pasos y la verificación de las soluciones. Estas dimensiones permiten interpretar las características de la intervención, aunque su estudio detallado requeriría registros específicos de las acciones y explicaciones de los estudiantes.

MATERIALES Y MÉTODOS

El estudio se desarrolló desde un enfoque cuantitativo, pues se buscó comparar el desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita a partir de datos numéricos y análisis estadístico. De acuerdo con Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), este enfoque resulta pertinente cuando se pretende contrastar hipótesis mediante datos numéricos y análisis estadístico. En este caso, se compararon los resultados obtenidos por dos grupos de estudiantes antes y después de la intervención.

El diseño fue cuasiexperimental, con grupo control y grupo experimental. Este tipo de diseño es adecuado en contextos escolares donde no siempre es posible asignar aleatoriamente a los participantes, debido a que los grupos ya se encuentran organizados institucionalmente. Palella Stracuzzi y Martins Pestana (2006) señalan que los diseños cuasiexperimentales permiten analizar el efecto de una variable independiente en grupos intactos, siempre que se controle la aplicación de mediciones previas y posteriores. En este estudio, la variable independiente correspondió a la modalidad de enseñanza, secuencia tradicional frente a secuencia mediada por Graspable Math, mientras que la variable dependiente fue el desempeño en la resolución de ecuaciones lineales.

La investigación se llevó a cabo en una institución fiscal de la parroquia Uyumbicho, cantón Mejía, provincia de Pichincha, Ecuador. La población de noveno año de Educación General Básica estuvo conformada por 135 estudiantes distribuidos en cuatro paralelos. Se seleccionó por conveniencia una muestra de 56 estudiantes de entre 12 y 14 años, pertenecientes a los paralelos A y C, con 28 integrantes en cada uno. La elección de estos cursos respondió a condiciones administrativas, a la disponibilidad horaria y al acceso a recursos tecnológicos. Una vez aplicado el pretest, el paralelo C fue asignado intencionalmente a la condición experimental por presentar el promedio inicial más bajo, mientras que el paralelo A quedó constituido como grupo control.

Antes de la intervención, se aplicó una prueba diagnóstica o pretest en ambos grupos. El instrumento estuvo conformado por diez ítems de opción múltiple, relacionados con identificación de ecuaciones lineales, propiedades de la igualdad, operaciones con números enteros, despeje de incógnitas y verificación de soluciones. Cada respuesta correcta tuvo un valor de un punto, con una calificación máxima de 10. Para la categorización descriptiva de las puntuaciones se utilizaron los rangos de la escala de valoración del desempeño establecida por el Ministerio de Educación (2025): 9.00–10.00, “Domina los aprendizajes”; 7.00–8.99, “Alcanza

los aprendizajes"; 4.01–6.99, "Está próximo a alcanzar los aprendizajes"; y ≤ 4.00, "No alcanza los aprendizajes". El instrumento fue sometido al juicio de seis evaluadores, docentes de la Unidad Educativa Uyumbicho, quienes valoraron criterios de coherencia, claridad, suficiencia, pertinencia, organización y actualidad, entre otros.

Posteriormente, se desarrollaron dos secuencias didácticas diferenciadas. Las planificaciones microcurriculares de ambas secuencias contemplaron una duración de 90 minutos y se organizaron en tres fases: anticipación, construcción y consolidación. El grupo control trabajó bajo una metodología tradicional, basada en la explicación docente, la resolución de ejercicios en pizarra y la práctica individual en cuaderno. En esta secuencia se hizo énfasis en los procedimientos de despeje de incógnitas y en la aplicación de operaciones inversas. El grupo experimental, por su parte, participó en una intervención mediada por Graspable Math, en la que los estudiantes utilizaron la herramienta para manipular expresiones algebraicas, reorganizar términos, observar transformaciones equivalentes y verificar soluciones. Esta intervención fue guiada en todo momento por el docente, quien orientó el uso de la herramienta y relacionó las acciones digitales con las propiedades de la igualdad.

Al finalizar la intervención, se aplicó un postest a ambos grupos. El postest estuvo conformado por diez ítems de opción múltiple y mantuvo una estructura semejante a la del pretest, aunque se modificaron los ejercicios para reducir el posible sesgo de memoria. En la clase posterior a la finalización de la intervención, se aplicó al grupo experimental una encuesta de satisfacción conformada por diez ítems con cinco opciones de respuesta tipo Likert: totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, neutral, de acuerdo y totalmente de acuerdo. Los ítems abordaron la facilidad de uso, la motivación, la comprensión de los procedimientos, la retroalimentación recibida y la preferencia por el recurso.

Se contó con la autorización de la Unidad Educativa Uyumbicho para desarrollar el trabajo de campo. Los objetivos del estudio fueron socializados con las autoridades institucionales y se garantizó, en todo momento, la confidencialidad de los participantes.

Los datos se procesaron mediante estadística descriptiva e inferencial. Para las pruebas pedagógicas se calcularon promedios, medianas, desviaciones estándar, valores mínimos y máximos y niveles de logro. Las respuestas de la encuesta de satisfacción se resumieron mediante porcentajes por categoría de respuesta. Para comparar las puntuaciones del postest entre los dos grupos independientes se aplicó la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney, sin asumir normalidad de las puntuaciones. El nivel de significancia se estableció en $\alpha = 0.05$. Como medida complementaria de magnitud, se calculó el tamaño del efecto r a partir del valor absoluto de Z dividido por la raíz cuadrada del número total de participantes ($N = 56$).

RESULTADOS

Los resultados se presentan en cuatro apartados: diagnóstico inicial, desempeño posterior a las modalidades de enseñanza, contraste estadístico de los resultados del postest y percepción del grupo experimental sobre el uso de Graspable Math. Esta organización permite describir el nivel inicial de ambos grupos, presentar las puntuaciones posteriores y comparar el desempeño alcanzado por el grupo control y el grupo experimental al finalizar las intervenciones.

Diagnóstico inicial sobre resolución de ecuaciones lineales

El pretest permitió identificar el nivel inicial de desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. Los resultados mostraron un bajo desempeño en ambos grupos. Como se muestra en la Tabla 1, el grupo control obtuvo un promedio de 4.54 puntos, mientras que el grupo experimental registró un promedio de 4.32 puntos. En ambos casos, las calificaciones se ubicaron entre 2 y 6 puntos, por lo que ningún estudiante alcanzó el nivel de "Alcanza los aprendizajes", establecido a partir de 7.00 puntos según la escala de valoración del Ministerio de Educación (2025).

Tabla 1

Resultados descriptivos del pretest

Grupo	N	Promedio	Calificación mínima	Calificación máxima
Control	28	4.54	2	6
Experimental	28	4.32	2	6

Los promedios obtenidos en el pretest fueron descriptivamente cercanos: 4.54 puntos en el grupo control y 4.32 puntos en el grupo experimental. Estos resultados muestran que ambos grupos presentaban dificultades iniciales en la resolución de ecuaciones lineales. Sin embargo, la proximidad de los promedios no constituye por sí sola una demostración de equivalencia entre los grupos, debido a que se trabajó con cursos previamente conformados y no se realizó una asignación aleatoria de los participantes.

Al categorizar las calificaciones según la escala cualitativa nacional, se observó que el 100% de los estudiantes se ubicaba por debajo del nivel de aprobación. La mitad de los estudiantes de cada grupo se encontraba en el nivel "Está próximo a alcanzar los aprendizajes", mientras que la otra mitad se ubicaba en "No alcanza los aprendizajes". Este resultado evidencia la necesidad de desarrollar acciones didácticas orientadas a fortalecer el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Desempeño posterior a la intervención didáctica

Después de aplicar las modalidades de enseñanza, se administró el postest a ambos grupos. Descriptivamente, los dos grupos obtuvieron promedios superiores a los registrados en la prueba diagnóstica. En el postest, el grupo control alcanzó un promedio de 6.07 puntos, con

calificaciones que oscilaron entre 5 y 8, mientras que el grupo experimental obtuvo un promedio de 7.86 puntos, con calificaciones que fueron de 6 a 10.

Tabla 2

Estadísticos descriptivos del postest

Grupo	N	Media	Mediana	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
Control	28	6.07	6.00	0.98	5	8
Experimental	28	7.86	8.00	1.01	6	10

Los estadísticos descriptivos evidencian que el grupo experimental obtuvo un desempeño superior al del grupo control. Mientras el grupo control alcanzó una media de 6.07 puntos, el grupo experimental obtuvo una media de 7.86. Asimismo, la mediana del grupo experimental fue mayor, lo que indica que sus calificaciones tendieron a concentrarse en niveles superiores de logro. Esta distribución se detalla en la Tabla 3.

Tabla 3

Distribución de estudiantes según nivel de logro en el postest

Nivel de logro	Grupo control	Grupo experimental
Domina los aprendizajes	0 estudiantes	6 estudiantes
Alcanza los aprendizajes	10 estudiantes	20 estudiantes
Está próximo a alcanzar los aprendizajes	18 estudiantes	2 estudiantes
No alcanza los aprendizajes	0 estudiantes	0 estudiantes

La distribución por niveles de logro evidencia que, en el grupo experimental, 26 de los 28 estudiantes alcanzaron o dominaron los aprendizajes esperados. En cambio, en el grupo control, 18 estudiantes permanecieron en el nivel “Está próximo a alcanzar los aprendizajes” y 10 alcanzaron el nivel esperado. Estos resultados indican que la intervención con Graspable Math no solo se asoció con un promedio más alto, sino también con una mayor concentración de estudiantes en los niveles superiores de desempeño.

Comparación de los resultados del postest y percepción estudiantil

Para comparar el desempeño posterior de los grupos, se aplicó la prueba U de Mann-Whitney a las puntuaciones obtenidas en el postest. La hipótesis nula establecía que no existían diferencias estadísticamente significativas entre el postest del grupo que trabajó mediante metodología tradicional y el postest del grupo que participó en la intervención mediada por Graspable Math. La hipótesis alternativa planteaba la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos.

Tabla 4

Comparación del desempeño en el postest mediante la prueba U de Mann-Whitney

Grupo	N	Rango promedio	Suma de rangos	U	Z	p
Control	28	17.64	494.00	88.00	-5.112	< .001
Experimental	28	39.36	1102.00			
Total	56					

Como se muestra en la Tabla 4, la prueba U de Mann-Whitney evidenció una diferencia estadísticamente significativa entre las puntuaciones del grupo control y del grupo experimental en el postest, $U = 88.00$, $Z = -5.112$, $p < .001$. Los rangos promedio fueron 39.36 para el grupo experimental y 17.64 para el grupo control. En consecuencia, se rechazó la hipótesis nula.

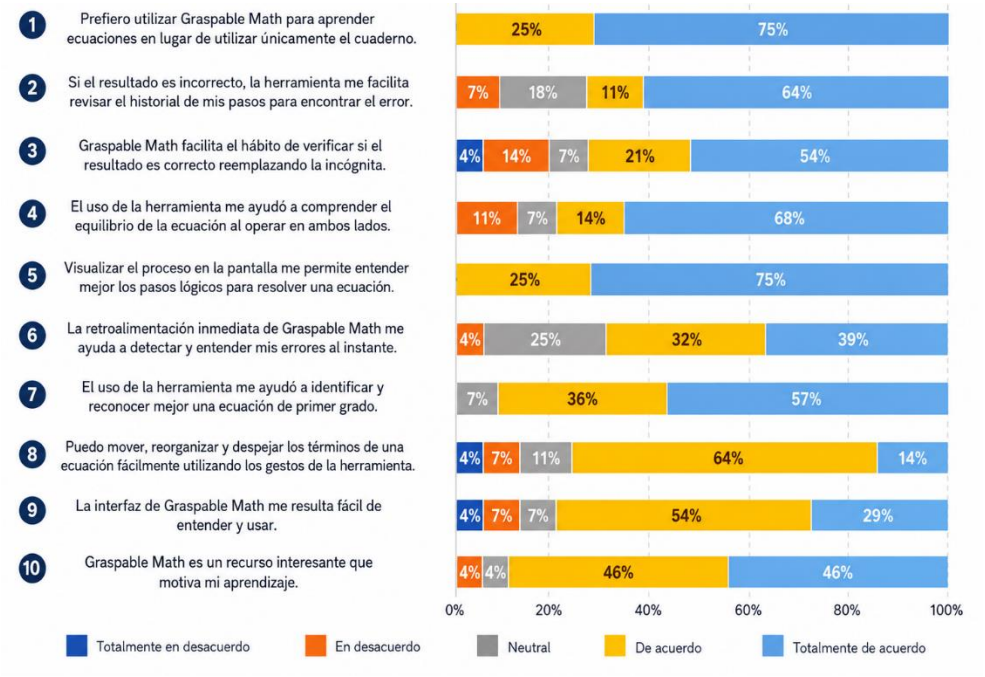
El tamaño del efecto, calculado a partir del valor absoluto de Z y la raíz cuadrada del número total de participantes, fue $r = .68$. Este valor complementa el contraste de significación al describir la magnitud de la diferencia observada entre las distribuciones de los grupos. No obstante, su interpretación se limita al desempeño alcanzado en los ítems que conformaron el postest y no demuestra por sí sola modificaciones en la naturaleza del razonamiento algebraico de los estudiantes.

Estos resultados sugieren que la intervención mediada por Graspable Math se asoció con un mejor desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.

De manera complementaria, la encuesta de satisfacción aplicada al grupo experimental reflejó una valoración favorable del entorno digital, como se presenta en la Figura 1. Los estudiantes manifestaron que Graspable Math les permitió visualizar los pasos, manipular las expresiones e identificar errores durante el proceso de resolución. También expresaron una preferencia favorable por el uso de la herramienta frente al trabajo exclusivo con el cuaderno. Estos resultados corresponden a las percepciones declaradas por los participantes y permiten identificar características valoradas de la experiencia, pero no constituyen por sí mismos evidencia directa de cambios en la comprensión algebraica.

Figura 1

Percepción del grupo experimental sobre el uso de Graspable Math



Nota. Datos obtenidos mediante la encuesta de satisfacción aplicada al grupo experimental.

DISCUSIÓN

El grupo que participó en la secuencia didáctica mediada por Graspable Math obtuvo puntuaciones superiores en el postest respecto del grupo control. Ambos grupos presentaron promedios finales mayores que los iniciales; sin embargo, el contraste U de Mann-Whitney se realizó sobre las puntuaciones del postest y no constituye una prueba directa de diferencias entre los cambios pretest–postest. Por ello, el hallazgo principal es la diferencia observada entre los grupos al finalizar las secuencias didácticas, cuya interpretación debe tener en cuenta la asignación intencional y las características propias del diseño.

Aunque la diferencia en el postest constituye el principal resultado empírico, su interpretación no debería reducirse a un simple incremento de calificaciones. La intervención incorporó elementos que modificaron la manera de trabajar con las expresiones algebraicas: los estudiantes pudieron actuar sobre los términos, visualizar las transformaciones y recibir retroalimentación durante todo el proceso de resolución. Estas características ofrecen posibilidades didácticas para relacionar el procedimiento de despeje con la conservación de la igualdad. Sin embargo, el estudio no analizó de manera sistemática las acciones y explicaciones individuales de los estudiantes, por lo que estas posibilidades deben interpretarse como condiciones ofrecidas por la herramienta y no como evidencias concluyentes de cambios en el pensamiento algebraico.

Esta diferencia es didácticamente relevante. En la resolución de ecuaciones lineales, muchos errores se originan porque los estudiantes no reconocen que cada paso debe conservar la igualdad. Al manipular expresiones en Graspable Math, las operaciones dejan de ser instrucciones verbales aisladas y pasan a convertirse en acciones visibles sobre objetos simbólicos. Esta característica puede abrir espacio para discutir que los términos no se "mueven" arbitrariamente, sino que cada transformación debe justificarse mediante propiedades que conservan la equivalencia entre ambos miembros.

La valoración expresada por los estudiantes sugiere que la visualización paso a paso facilitó el seguimiento de los procedimientos empleados durante la resolución. Al mostrar los cambios producidos después de cada acción, la herramienta pudo contribuir a organizar el trabajo con signos, operaciones e incógnitas. No obstante, el estudio no incluyó una medición específica de carga cognitiva ni un análisis de los procesos mentales de los participantes, por lo que la relación entre visualización y reducción de la dificultad debe entenderse como una posible explicación teórica y no como un resultado directamente comprobado.

Otro elemento relevante es la retroalimentación inmediata. En el trabajo tradicional con lápiz y papel, el error suele identificarse recién al finalizar el ejercicio o durante la corrección docente. En Graspable Math, en cambio, los estudiantes pueden observar las consecuencias de sus acciones a medida que avanzan, lo que abre oportunidades para revisar, corregir y replantear el procedimiento sobre la marcha.

En relación con los apoyos disponibles durante la resolución, Iannacchione et al. (2023) encontraron que la relación entre la solicitud de pistas y el desempeño posterior variaba según el entorno digital utilizado y el desempeño previo de los estudiantes. Este hallazgo sugiere que los apoyos incorporados en una tecnología educativa deben interpretarse tomando en cuenta las características específicas del entorno y la forma en que los estudiantes los utilizan durante la resolución de las tareas.

Desde el punto de vista didáctico, la retroalimentación inmediata puede favorecer procesos de autorregulación, siempre que el estudiante comprenda la información proporcionada por la herramienta y reciba la orientación necesaria. No obstante, para determinar si se produjo un aumento real de la autonomía sería necesario analizar registros de las decisiones, correcciones, solicitudes de ayuda y justificaciones realizadas por los estudiantes durante la actividad.

Las características de Graspable Math permiten plantear relaciones potenciales con distintas dimensiones del aprendizaje algebraico. La práctica de transformaciones puede vincularse con una dimensión operativa; la visualización de los dos miembros de la ecuación, con una dimensión estructural; y la revisión de los pasos, con una dimensión metacognitiva. Sin embargo, estas relaciones no fueron evaluadas directamente mediante los instrumentos utilizados. Por eso, estos hallazgos deben entenderse como hipótesis interpretativas que requieren estudios

posteriores, basados en producciones de los estudiantes, registros de interacción, entrevistas u observaciones de aula.

Desde esta perspectiva, los resultados del estudio sugieren que Graspable Math puede constituir un apoyo para la enseñanza del álgebra, siempre que se integre en una secuencia didáctica coherente. El recurso no produce aprendizaje por sí mismo, pero sí puede generar condiciones favorables para que el estudiante explore, visualice y justifique. De ahí que la principal implicación pedagógica del estudio sea que Graspable Math puede utilizarse como mediador entre la explicación docente, la práctica algebraica y la construcción de significado. Su incorporación resulta especialmente pertinente en aquellos contenidos donde los estudiantes suelen aplicar reglas mecánicas sin comprender del todo las propiedades que las justifican.

Además, los hallazgos permiten destacar la importancia de diseñar experiencias de aprendizaje en las que el estudiante no solo ejecute procedimientos, sino que también pueda observar, comparar y justificar las transformaciones que realiza. En el caso de las ecuaciones lineales, este aspecto resulta fundamental porque el aprendizaje no depende únicamente de llegar al valor correcto de la incógnita, sino de comprender la relación de equivalencia que se mantiene durante todo el proceso. Por ello, la incorporación de Graspable Math puede contribuir a fortalecer prácticas de enseñanza más reflexivas, en las que la tecnología funcione como apoyo para la construcción de significado matemático y no solo como un recurso motivacional.

Los resultados de satisfacción del grupo experimental complementan la interpretación anterior. La valoración positiva de la herramienta no debería reducirse únicamente al atractivo tecnológico. El interés manifestado por los estudiantes puede estar asociado, más bien, con la posibilidad de comprender mejor un contenido que inicialmente les resultaba abstracto. Cuando los estudiantes perciben que pueden actuar sobre la ecuación, verificar sus pasos y corregir errores, la actividad matemática se vuelve más accesible y significativa para ellos.

Estos hallazgos dialogan con investigaciones recientes sobre sistemas de notación algebraica dinámica. Chan et al. (2022) evidenciaron que el uso de un sistema algebraico dinámico favorece la comprensión de la equivalencia matemática en estudiantes de educación media, aspecto directamente relacionado con la resolución de ecuaciones lineales. También pueden interpretarse a la luz de Duval (2017), dado que las funcionalidades de Graspable Math ofrecen oportunidades para coordinar representaciones y transformaciones semióticas, aspecto relevante para la comprensión matemática. En este sentido, la herramienta no funciona únicamente como un recurso tecnológico, sino como un medio para ampliar las posibilidades de representación, manipulación y acción sobre el objeto algebraico.

Decker-Woodrow et al. (2023) también mostraron que los resultados asociados con el uso de tecnologías para el aprendizaje del álgebra pueden variar según las características del entorno digital empleado. Este antecedente respalda la necesidad de interpretar los resultados de

cada herramienta en función de su diseño pedagógico y de las formas de interacción que propone, en lugar de atribuir los resultados al uso de tecnología de manera general.

No obstante, la interpretación de los resultados del presente estudio debe considerar varias limitaciones. En primer lugar, la muestra fue seleccionada por conveniencia y estuvo conformada por grupos intactos. Además, se trabajó con un solo paralelo por condición y el grupo experimental fue asignado después del pretest, atendiendo a su menor promedio inicial. Por ello, no es posible separar plenamente las diferencias propias de los paralelos de las asociadas con las secuencias didácticas, lo que limita la inferencia causal y la generalización de los resultados. En segundo lugar, la intervención se desarrolló durante un periodo reducido y no se aplicó una prueba de seguimiento que permitiera valorar la permanencia de los aprendizajes en el tiempo. En tercer lugar, los instrumentos se centraron en el desempeño y en la percepción estudiantil; no se recopilaron de manera sistemática registros de pantalla, producciones escritas, explicaciones verbales, entrevistas u observaciones que permitieran analizar cómo los estudiantes interpretaron la igualdad, justificaron las transformaciones o corrigieron sus errores. Por esta razón, los resultados no permiten afirmar que se hayan producido cambios específicos en el pensamiento algebraico.

En síntesis, los resultados sugieren que Graspable Math puede constituirse en un recurso didáctico pertinente para la enseñanza de ecuaciones lineales, siempre que su uso se integre dentro de una secuencia planificada y con mediación docente. Su potencial no radica en reemplazar la enseñanza del profesor, sino en ampliar las posibilidades de representación, manipulación y reflexión sobre las estructuras algebraicas.

CONCLUSIONES

El estudio analizó el desempeño de estudiantes de noveno año de Educación General Básica después de participar en dos secuencias didácticas para la resolución de ecuaciones lineales. Los resultados iniciales evidenciaron un bajo desempeño global en las tareas incluidas en el pretest en ambos grupos. Las puntuaciones agregadas presentadas no permiten establecer qué contenidos concentraron las mayores dificultades.

Después de las intervenciones, el grupo que trabajó con Graspable Math obtuvo puntuaciones superiores en el postest. La prueba U de Mann-Whitney evidenció una diferencia estadísticamente significativa entre los grupos, con un tamaño del efecto de $r = .68$. Estos resultados apuntan a una asociación entre la secuencia didáctica mediada por la herramienta y un mejor desempeño en las tareas incluidas en el instrumento. No obstante, debido al carácter cuasiexperimental del diseño, a la asignación intencional y al uso de grupos intactos, estos resultados no deberían interpretarse como una demostración causal definitiva.

La valoración de los estudiantes permitió identificar tres características apreciadas del entorno digital: la posibilidad de visualizar las transformaciones, manipular los términos y

reconocer errores durante el procedimiento. Estas características representan posibilidades didácticas relevantes para la enseñanza de las ecuaciones lineales, ya que permiten trabajar la relación entre las acciones realizadas y la conservación de la igualdad.

Sin embargo, las puntuaciones y percepciones obtenidas no bastan por sí solas para determinar cómo construyeron los estudiantes sus significados sobre la igualdad, o cómo evolucionaron sus razonamientos algebraicos. Para estudiar estos procesos será necesario incorporar registros de interacción con la plataforma, producciones estudiantiles, explicaciones verbales, entrevistas y observaciones de aula.

La principal implicación didáctica del estudio es que Graspable Math no debería incorporarse únicamente como un recurso para practicar procedimientos. Su uso requiere tareas que orienten a los estudiantes a anticipar transformaciones, justificar las operaciones, analizar los errores y verificar las soluciones. En este proceso, la mediación docente continúa siendo fundamental para vincular las acciones realizadas en el entorno digital con las propiedades matemáticas que sustentan la resolución de ecuaciones.

Se recomienda desarrollar investigaciones posteriores con muestras más amplias, intervenciones de mayor duración y diseños mixtos que permitan analizar conjuntamente el desempeño, las acciones realizadas en la plataforma y las explicaciones construidas por los estudiantes. También resulta pertinente estudiar la utilización de entornos de álgebra dinámica en otros contenidos, como sistemas de ecuaciones, funciones lineales e inecuaciones.

REFERENCIAS

Acaro-Lapo, F. E., Porozo-Rodríguez, M. J., y Rodríguez-Caballero, G. A. (2024). La enseñanza de la solución de ecuaciones lineales con una incógnita en octavo año. *Sociedad & Tecnología*, 7(S1), 74-91. https://doi.org/10.51247/st.v7iS1.493

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 613–632. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002

Cabero-Almenara, J., Barroso-Osuna, J., Rodríguez-Gallego, M., y Palacios-Rodríguez, A. (2020). La competencia digital docente. El caso de las universidades andaluzas. *Aula Abierta*, 49(4), 363–372. https://doi.org/10.17811/rifie.49.4.2020.363-372

Chan, J. Y.-C., Closser, A. H., Smith, H., Lee, J.-E., Drzewiecki, K. C., & Ottmar, E. (2023). Grasping patterns of algebraic understanding: Dynamic technology facilitates learning, research, and teaching in mathematics education. En K. M. Robinson, D. Kotsopoulos, & A. K. Dubé (Eds.), *Mathematical teaching and learning: Perspectives on mathematical minds in the elementary and middle school years* (pp. 207–225). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31848-1_12

Chan, J. Y.-C., Lee, J.-E., Mason, C. A., Sawrey, K., & Ottmar, E. (2022). From Here to There! A dynamic algebraic notation system improves understanding of equivalence in middle-school students. *Journal of Educational Psychology*, 114(1), 56–71. https://doi.org/10.1037/edu0000596

Decker-Woodrow, L. E., Mason, C. A., Lee, J.-E., Chan, J. Y.-C., Sales, A., Liu, A., & Tu, S. (2023). The impacts of three educational technologies on algebraic understanding in the context of COVID-19. *AERA Open, 9*, 23328584231165919. https://doi.org/10.1177/23328584231165919

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. *Springer*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Graspable Math. (s. f.). *Graspable Math.* Recuperado el 6 de junio de 2026, de https://graspablemath.com

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza Torres, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* McGraw-Hill Educación.

Iannacchione, A., Ottmar, E., Ngo, V., Mason, C. A., Chan, J. Y.-C., Smith, H., Drzewiecki, K. C., & Shaw, S. T. (2023). Examining relations between math anxiety, prior knowledge, hint usage, and performance of math equivalence in two different online learning contexts. *Instructional Science, 51*, 285–307. https://doi.org/10.1007/s11251-022-09604-6

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2023). Informe nacional Ser Estudiante: Subnivel Básica Superior. Año lectivo 2022-2023. https://cloud.evaluacion.gob.ec/dagireportes/sestciclo21/nacional/2022-2023_10.pdf

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 8(1), 139-151.

Ministerio de Educación, Deporte y Cultura. (2025). *Currículo priorizado con énfasis en competencias comunicacionales, matemáticas, digitales y socioemocionales: Educación General Básica. Subnivel Superior.* https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2025/07/Curriculo-Priorizado-Superior.pdf

Ministerio de Educación. (2025). Lineamientos para completar el expediente estudiantil. https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2025/06/lineamientos-para-completar-el-expediente-estudiantil.pdf

Ottmar, E., Landy, D., Weitnauer, E., & Goldstone, R. (2015). Graspable Mathematics: Using perceptual learning technology to discover algebraic notation. En M. Meletiou-Mavrotheris, K. Mavrou, & E. Paparistodemou (Eds.), *Integrating touch-enabled and mobile devices into contemporary mathematics education* (pp. 24–48). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-4666-8714-1.ch002

Palella Stracuzzi, S. y Martins Pestana, F. (2006). *Metodología de la investigación cuantitativa*. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Pérez, M., Diego, J. M., Polo, I., y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA*, 13(2), 84-103. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7613

Sapallanay Gómez, N. N., Mendoza Inga, J. L., Laurente Chahuayo, C., & Rossal Núñez, M. (2023). Herramienta digital Graspable Math en el aprendizaje de ecuaciones de primer grado. *Llimpi*, 3(2), 42–52. https://doi.org/10.54943/lree.v3i2.397

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Vargas-Murillo, G. (2020). Estrategias educativas y tecnología digital en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos Hospital de Clínicas, 61*(1), 114-129.